FRACTIONS CONTINUES ET CALENDRIER

Discipline : Mathématiques

Niveau

A partir de la quatrième

Objectif

Comprendre, grâce aux fractions, la raison des années bissextiles dans notre calendrier

Compétences

Effectuer des opérations sur des fractions

Pré requis

Division euclidienne
Opérations sur les fractions

Durée

1 heure

Avertissement

Techniquement, cette activité est faisable par des élèves de 4^{e}. Cependant, la gymnastique de manipulation des fractions demandées ici est assez importante et demande donc d'être réalisée à la fin du chapitre.

FRACTIONS CONTINUES ET CALENDRIER

En 46 avant JC, Jules César met en place un nouveau calendrier qui porte son nom : le calendrier julien. Ce calendrier avait assigné à une année la durée de 365,25 jours avec le principe des années bissextiles. Les années se succèdent par cycle de 4 ans : 3 ans de 365 jours et la quatrième année de 366 jours pour rattraper le décalage.
Ainsi, on rattrape le décalage 1 année sur 4 (1 : 4 = 0,25), selon la règle suivante :

Une année est bissextile si elle est multiple de 4.

La Terre met environ 365,2422 jours environ à faire un tour complet autour du Soleil. Le calendrier julien donne donc une durée trop longue à l'année : en 1582, le décalage accumulé depuis 46 avant JC est de 10 jours !
Ainsi, le pape Grégoire XIII décide, en 1582, de réformer le calendrier julien, afin que la durée de l'année soit plus proche de 365,2422 jours. Cette réforme a abouti au calendrier grégorien, du nom de ce pape.

L'idée générale est de trouver une fraction simple assez proche de 365,2422. Il existe une méthode pour réaliser ceci de manière automatique : l'algorithme des fractions continues.

I L'algorithme des fractions continue sur un exemple

Voyons un exemple de cette méthode sur le nombre π

On choisit 3,14159 comme valeur approchée de π, soit $\frac{3114159}{100000}$.

Etape 0 : *On inverse tout d'abord la fraction*

On obtient : $\frac{100000}{3114159}$. C'est cette fraction que l'on va approchée par une autre, plus simple.

On obtiendra alors une valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$.

Voici une étape complète de cette méthode.

Etape 1 : *On divise le numérateur et le dénominateur de la fraction par le numérateur*.

Ainsi : on obtient : $\dfrac{\frac{100000}{100000}}{\frac{314159}{100000}} = \dfrac{1}{\frac{300000}{100000}+\frac{14159}{100000}} = \dfrac{1}{3+\frac{14159}{100000}}$

Si on néglige la fraction qui accompagne 3, on obtient $\frac{1}{3}$ comme approximation, ce qui est un peu fort.

Etape 2 : *Appliquer l'étape 1 à la fraction qui accompagne 3.*

Il vient : $\dfrac{1}{3+\dfrac{\frac{14159}{14159}}{\frac{100000}{14159}}} = \dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\frac{14159\times7+887}{14159}}} = \dfrac{1}{3+\dfrac{1}{7+\frac{887}{14159}}}$ car $100000=14159\times7+887$

Ainsi, à cette étape, en négligeant la dernière fraction $\frac{887}{14159}$, on obtient la valeur approchée : $\dfrac{1}{3+\frac{1}{7}} = \dfrac{1}{\frac{3\times7+1}{7}} = \dfrac{7}{22}$.

1) Comparer cette valeur et $\frac{1}{\pi}$. $\frac{22}{7}$ a été longtemps employée comme approximation de π.

2) Continuer ainsi pour les étapes 3, 4 et 5. Quelle approximation obtient-on alors ?

II A la recherche d'un nouveau calendrier

On cherche ici une fraction plus simple approchant la fraction $\frac{3652422}{10000}$. La partie entière de cette fraction est 365 évidemment et ne pose pas de problème. Nous allons donc plutôt chercher une fraction approchant $\frac{2422}{10000}$

Etape 0 :

Etape 1 :

Etape 2 :

Etape 3 :

L'étape 4 donne une fraction difficilement exploitable.
Conclusion : ________est une approximation de 0,2422 à…… près.

III Utilisation de la fraction simplifiée

1) Sur une période de 400 ans, combien faut-il ajouter de jours supplémentaires à l'année de 365 jours ?
2) Retrouver ce résultat en le confrontant à la règle du calendrier grégorien : il y a 24 années bissextile par siècle, plus une année bissextile tous les 400 ans. Ce que l'on peut énoncer sous la forme suivante :

Une année est bissextile si elle est multiple de 4 sauf les années séculaires (multiples de 100), qui ne sont bissextiles que si elles sont multiples de 400.